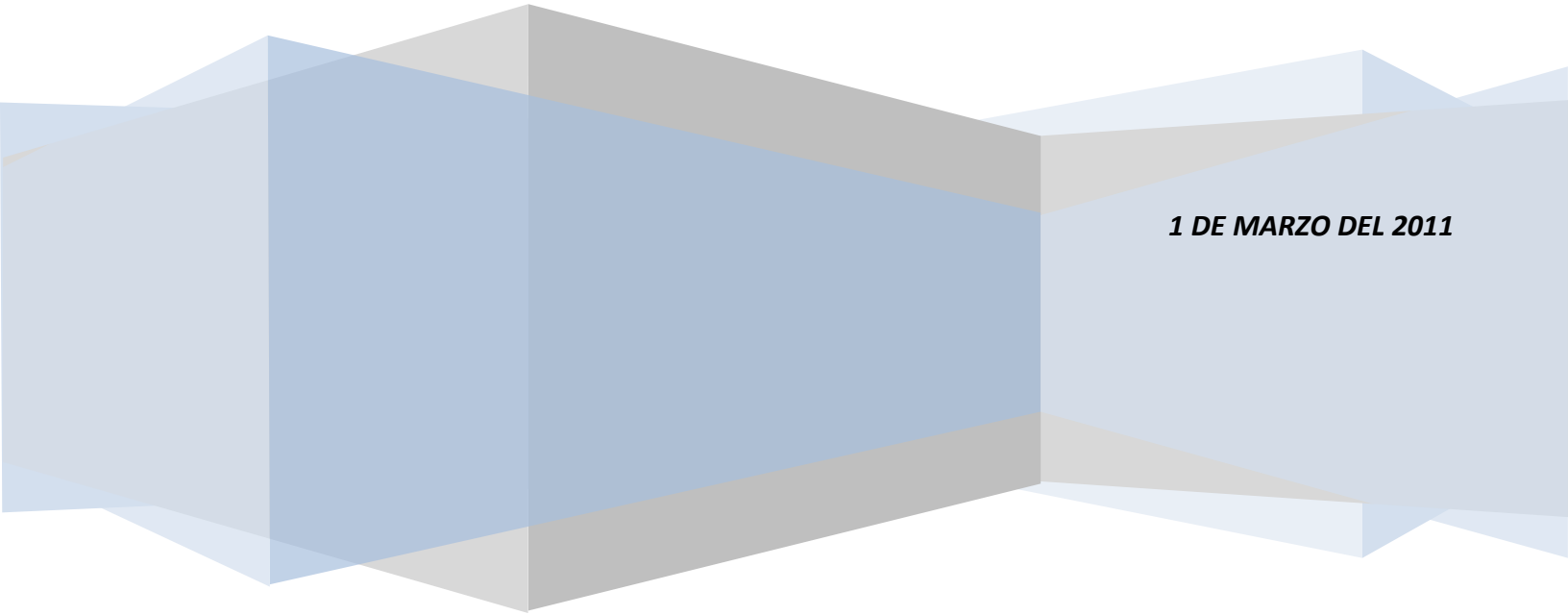
SIMULACIÓN *EQUIPO: 4*

EXPOSICIÓN UNIDAD II

2.1 MÉTODOS DE GENERACIÓN DE NÚMEROS PSEUDOALEATORIOS

2.2 PRUEBAS ESTADÍSTICAS DE ALEATORIEDAD

CABRERA HERNÁNDEZ TERESA ELIZABETH
RAMÍREZ BUSTOS CARLOS FABIÁN



1 DE MARZO DEL 2011

2.1 GENERACIÓN DE NÚMEROS PSEUDOALEATORIOS

Se llama números pseudoaleatorios a una sucesión determinística de números en el intervalo [0,1] que tiene las mismas propiedades estadísticas que una sucesión de números aleatorios. Una forma general de obtener números pseudoaleatorios es partir de una semilla de números y aplicar una función d.

Los números pseudoaleatorios son necesarios cuando se pone en práctica un modelo de simulación, para obtener observaciones aleatorias a partir de distribuciones de probabilidad.

Los números aleatorios generados en un inicio por una computadora casi siempre son números aleatorios enteros.

En sentido estricto, los números generados por una computadora no se deben llamar números aleatorios porque son predecibles y se pueden reproducir, dado el número aleatorio generador que se use. Por ello en ocasiones se les llama números pseudoaleatorios.

No obstante, el punto importante es que, en forma satisfactoria, hacen las veces los números aleatorios en la simulación si el método que se usa para generarlos es válido.

El procedimiento usado por una computadora para generar números aleatorios se llama generador de números aleatorios.

Un generador de números aleatorios es un algoritmo que produce secuencias de números que siguen una distribución de probabilidad específica y tienen la apariencia de aleatoriedad.

La referencia a secuencias de números aleatorios significa que el algoritmo produce muchos números aleatorios en serie.

La secuencia de números generados debe cumplir con las 2 hipótesis siguientes:

1. Distribución Uniforme
2. Independencia (no correlacionados)

Además son importantes los siguientes aspectos:

- Las subsecuencias también deben cumplir las 2 hipótesis.
- Deben ser secuencias largas y sin huecos ***(densas)***.
- Algoritmos rápidos y que no ocupen mucha memoria.

Los números aleatorios se pueden dividir en dos categorías principales:

1. Números aleatorios enteros. Es una observación aleatoria de una distribución uniforme discretizada en el intervalo ***n, n+1***…
   Por lo general, ***n = 0*** ó ***1*** donde estos son valores convenientes para la mayoría de las aplicaciones.
2. Números aleatorios uniformes. Es una observación aleatoria a partir de una distribución uniforme ***(continua)*** en un intervalo ***[a, b]***.

PROPIEDADES MÍNIMAS QUE DEBERÁN SATISFACER LOS NÚMEROS PSEUDOALEATORIOS:

- Ajustarse a una distribución U ***(0,1)***.
- Ser estadísticamente independientes ***(no debe deducirse un número conociendo otros ya generados)***.
- Ser reproducibles ***(la misma semilla debe dar la misma sucesión)***.
- Ciclo repetitivo muy largo.
- Facilidad de obtención.
- Ocupar poca memoria.

Cualquiera que sea el método para generar números aleatorios debe satisfacer las siguientes condiciones, las cuales deben ser:

1. Uniformemente distribuidos.
2. Estadísticamente independientes.
3. Reproducibles.
4. Sin repetición dentro de una longitud determinada de la sucesión.
5. Generación a grandes velocidades.
6. Requerir el mínimo de capacidad de almacenamiento.

METODOS DE GENERACION DE NUMEROS ALEATORIOS

Métodos congruenciales para generar números aleatorios.

Se cuenta con varios generadores de números aleatorios, de los cuales los más populares son los métodos congruenciales ***(aditivo, multiplicativo y mixto)***.

El método congruencial mixto genera una sucesión de números aleatorios enteros en un intervalo de ***0*** a ***m-1***. Éste método siempre calcula el siguiente número a partir del último que obtuvo, dado un número aleatorio inicial ***Xo***, llamado semilla. En particular, calcula el ***(n+ 1)-ésimo*** número aleatorio ***Xn+1*** a partir del ***n-ésimo*** número aleatorio ***Xn*** con la relación de recurrencia.

$$X_{n+1} \equiv (ax_n + c) \text{ (módulo } m)$$

Donde ***a, c*** y ***m*** son enteros positivos ***(a < m, c < m)***. Ésta notación matemática significa que ***Xn+1 son 0, 1,…, M-1***, de manera que m representa el número deseado de valores diferentes que se puede generar como números aleatorios.

A manera de ilustración, suponga que ***m=8, a=5, c=7*** y ***Xo=4***. En la siguiente tabla se calculó la sucesión de números aleatorios que se tuvo ***(esta sucesión no puede continuar, puesto que solo se repetirían los números en el mismo orden)***. Obsérvese que ésta sucesión incluye los ocho números posibles una sola vez. Ésta propiedad es necesaria para una sucesión de números aleatorios enteros, pero no ocurre con algunos valores de ***a*** y ***c***.

n	x_n	$5x_n + 7$	$(5x_n + 7)/8$	X_{n+1}
0	4	27	3 + 3/8	3
1	3	22	2 + 6/8	6
2	6	37	4 + 5/8	5
3	5	32	4 + 0/8	0
4	0	7	0 + 7/8	7
5	7	42	5 + 2/8	2
6	2	17	2 + 1/8	1
7	1	12	1 + 4/8	4

La cantidad de números consecutivos en una sucesión antes de que se repita se conoce como longitud de ciclo. En consecuencia, la longitud de ciclo en el ejemplo es 8. La longitud de ciclo máxima es ***m***, de manera que sólo los valores de ***a*** y ***c*** considerados son los que conducen a una longitud de ciclo máxima.

En la siguiente tabla, se ilustra la conversión de números aleatorios en números aleatorios uniformes. La columna de la izquierda proporciona los números aleatorios enteros que se obtuvo en la última columna de la tabla anterior. La última columna proporciona los números aleatorios uniformes correspondientes a partir de la fórmula:

$$\textit{Número aleatorio uniforme} = \frac{\textit{Número aleatorio entero}}{m} + \frac{1}{2}$$

Número aleatorio entero	Número aleatorio uniforme
3	0.4375
6	0.8125
5	0.6875
0	0.0625
7	0.9375
2	0.3125
1	0.1875
4	0.5625

El método congruencial multiplicativo corresponde al caso especial del método congruencial mixto en el que ***c =0***. El método congruencial aditivo también es parecido, pero establece ***a = 1*** y sustituye a ***c*** por algún número aleatorio anterior a ***Xn*** en la sucesión, por ejemplo, ***Xn-1 (así requiere más de una semilla para iniciar el cálculo de la sucesión)***.

El método congruencial mixto proporciona una gran flexibilidad para elegir un generador de números aleatorios en particular ***(una combinación específica de a, c y m)***. Sin embargo, se requiere tener mucho cuidado al seleccionar el generador de números aleatorios porque la mayoría de las combinaciones de valores ***a, c*** y ***m*** conducen a propiedades indeseables ***(por ejemplo, una longitud de ciclo menor a m)***.

2.2 PRUEBAS ESTADÍSTICAS DE ALEATORIEDAD

Las propiedades estadísticas que deben poseer los números pseudoaleatorios generados por los métodos congruenciales tienen que ver con independencia y aleatoriedad estadísticas.

La prueba de la frecuencia se usa para comprobarla uniformidad de una sucesión de ***N*** números pseudoaleatorios. Para cada conjunto de ***N*** números pseudoaleatorios, se divide el intervalo unitario ***(0,1)*** en ***x*** subintervalos iguales; el número esperado de números pseudoaleatorios que se encontrarán en cada subintervalo es ***N/x. Si fj (j=1,2...x)*** de nota el número que realmente se tiene de números pseudoaleatorios ***Ri (i=1,2,...N)*** en el subintervalo ***(j-1)/ x ≤ ri < j/x*** entonces el estadístico:

$$\chi_1^2 = \left[\frac{x}{N}\right] \sum_{j=1}^{x} \left[f_j - \frac{N}{x}\right]^2 \quad x_1^{2..} r_n x^2 \; r_{2\cdot} r_1 \cdot$$

Tiene aproximadamente una distribución con ***x-1 g.l***…

La hipótesis de que los números pseudoaleatorios en el de conjunto de N números pseudoaleatorios, son verdaderos números pseudoaleatorios, debe rechazarse si con ***x-1 g.l***. Excede su valor critico fijado por el nivel de significancia deseado.

PRUEBA DE MEDIOS

Consiste en verificar que los números generados tengan una media estadísticamente igual a ***1/2***, de este modo la hipótesis planteada es

$$\text{Ho} = \text{hipótesis nula:} \qquad \mu = \tfrac{1}{2}$$
$$\text{H}_1 = \text{hipótesis alternativa:} \qquad \mu \neq \tfrac{1}{2}$$

Paso 1: Calcular la media de los n números generados

$$X = \frac{1}{n}\sum_{i=i}^{n} r_1 = \frac{1}{n}\sum^{n} r1$$

Paso 2. Calcular los límites superior e inferior de aceptación.

$$ls_{V(x)} = \frac{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}{12(n-1)} \qquad ls_{V(x)}$$
$$li_{V(x)} \qquad li_{V(x)} = \frac{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}{12(n-1)}$$

Paso 3: Si ***V(x)*** se encuentra entre los valores de $li_{V(x)}$ y $ls_{V(x)}$, aceptamos la hipótesis nula y los números aleatorios tiene una variancia estadísticamente igual a ***1/12***.

PRUEBA DE PÓKER

Las pruebas de independencia consisten en demostrar que los números generados son estadísticamente independientes entre sí, esto es, que no depende uno de otro.

Hay varios métodos, entre los cuales están:

- La prueba de Póker.
- La prueba de corridas arriba y abajo.
- La prueba de corridas arriba debajo de la media.
- La prueba de la longitud de las corridas.
- La prueba de series.

La prueba de póker plantea la siguiente hipótesis:

$$Ho: ri \sim independiente$$
$$H_1: r_i \sim dependiente$$

Paso 1. Calcular las probabilidades esperadas para un juego de póker con ***5*** cartas numeradas del ***0*** al ***9*** con reemplazos. Se tienen 7 eventos con las siguientes probabilidades:

P (Pachuca)	= 0.3024
P (par)	= 0.5040
P (2 pares)	= 0.1080
P (1 tercia)	= 0.0720
P (Full)	= 0.0090
P (Poker)	= 0.0045
P (Quintilla)	= 0.0001

Paso 2. Calcular la frecuencia esperada de cada uno de los eventos multiplicando la probabilidad de cada evento por la cantidad de números aleatorios generados.

Paso 3. Para cada número aleatorio generado verificar si es ***Pachuca, 1 par, 2 pares, etc***., tomando los primeros 5 dígitos a la derecha del punto decimal. Con estos resultados se genera una tabla de frecuencias observadas de cada uno de los eventos.

Paso 4. Calcular la estadística:

$$\chi_1^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(FEi - Foi)^2}{FE}$$

Paso 5. Si el valor de C^2 no excede al estadístico de tablas χ_i^2 con ***6 g.l*** y una probabilidad de rechazo ***alfa =α***, entonces se acepta que los datos son estadísticamente independientes entre sí.

PRUEBA DE SERIES

$$Ho: r_i \sim independiente$$
$$H_1: r_i \sim dependiente$$

Paso 1 Crear un histograma de dos dimensiones con ***m*** intervalos, clasificando cada pareja de números consecutivos ***(Ri, Ri + 1)*** dentro de las casillas de dicho histograma de frecuencias. El número total de pares ordenados en cada casilla formará la frecuencia observada: ***Foi***.

Paso 2 Calcular la frecuencia esperada en cada casilla ***FE*** de acuerdo con ***FE=num/m*** donde núm. es el número total de parejas ordenadas.

Paso 3 Calcular el error χ_1^2, con la ecuación:

$$\chi_1^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(FE_i - FO_i)^2}{FE_i}$$

Paso 4 Si el valor de χ_1^2 es menor o igual al estadístico de tablas χ_1^2 con ***m-1*** grados de libertad y una probabilidad de rechazo ***α***, entonces aceptamos que estadísticamente los números son independientes.

PREGUNTAS SOBRE LA EXPOSICIÓN

1. ¿A QUE SE LE LLAMA NÚMERO(S) PSEUDOALEATORIO(S)?

A una sucesión determinística de números en el intervalo [0, 1] que tiene las mismas propiedades estadísticas que una sucesión de números aleatorios.

2. ¿PORQUÉ SE LES LLAMA NÚMEROS PSEUDOALEATORIOS?

Porque con predecibles y se pueden reproducir, dado el número aleatorio generador que se use.

3. ¿QUÉ SON LOS NÚMEROS RANDOM?

Son un elemento básico en la simulación de la mayoría de los sistemas discretos.

4. ¿QUÉ QUIERE DECIR Ri?

Significa Número Random.

5. ¿QUÉ REPRESENTA CADA NÚMERO RANDOM Ri?

Es una muestra independiente de una distribución uniforme y continua en el intervalo (*0, 1).*

6. ¿QUÉ PUNTO EN EL RANGO TIENE POSIBILIDAD DE SER ELEGIDO?

Todo punto en el rango tiene igual probabilidad de ser elegido.

7. ¿QUÉ SE NECESITA PARA EMPEZAR A CALCULAR LOS NÚMEROS ALEATORIOS?

Son calculados a partir de una semilla ***(Seed)*** y una fórmula.

8. ¿CUÁNTAS Y CUALES HIPOTESIS DEBE DE CUMPLIR LA SECUENCIA DE NÚMEROS GENERADOS?

Son 2 hipótesis y son:

- Distribución Uniforme.
- Independencia (No Correlacionados).

9. ¿CUÁNTOS Y CUALES ASPECTOS SON IMPORTANTES?

Son 3 aspectos y son:

- Las subsecuencias también deben cumplir las 2 hipótesis.
- Deben ser secuencias largas y sin huecos *(Densas).*
- Algoritmos rápidos y que no ocupen mucha memoria.

10. ¿EN CUANTAS CATEGORIAS SE PUEDEN DIVIDIR LOS NÚMEROS ALEATORIOS?

En 2 categorías principales.

11. ¿MENCIONA Y EXPLICA CUALES SON LAS 2 CATEGORIAS PRINCIPALES EN LAS QUE SE PUEDEN DIVIDIR LOS NÚMEROS ALEATORIOS?

- ***NÚMEROS ALEATORIOS ENTEROS:*** Es una observación aleatoria de una distribución uniforme discretizada en el intervalo n, n + 1…
  Por lo general, ***n = 0*** ó ***1*** donde estos son valores convenientes para la mayoría de las aplicaciones.
- ***NÚMERO ALEATORIOS UNIFORMES:*** Es una observación aleatoria a partir de una distribución uniforme ***(Continua)*** en un intervalo ***[a, b].***

12. ¿CUÁNTAS PROPIEDADES MÍNIMAS DEBEN SATISFACER LOS NÚMEROS PSEUDOALEATORIOS?

Son 6 propiedades mínimas las que tienen que cumplir.

13. ¿MENCIONA 4 PROPIEDADES MÍNIMAS QUE DEBEN CUMPLIR LOS NÚMEROS PSEUDOALEATORIOS?

- Ajustarse a una distribución del intervalo (0, 1).
- Ser estadísticamente independientes *(no debe deducirse un número conociendo otros ya generados)*.
- Ser reproducibles *(la misma semilla debe dar la misma sucesión).*
- Ciclo repetitivo muy largo.
- Facilidad de obtención.
- Ocupar poca memoria.

14. ¿CUÁNTAS Y CUALES SON LAS CONDICIONES QUE DEBEN SATISFACER LOS NÚMEROS PSEUDOALEATORIOS?

Son 6 condiciones y son:

- Uniformemente distribuidos.
- Estadísticamente independientes.

- Reproducibles.
- Sin repetición dentro de una longitud determinada de la sucesión.
- Generación a grandes velocidades.
- Requerir el mínimo de capacidad de almacenamiento.

15. ¿CÓMO SE ENCUENTRA EL PRIMER NÚMERO RANDOM?

La mayoría de los métodos *(Generadores)* comienzan con un número inicial *(Semilla o Seed)*, al cual se le aplica un determinado procedimiento para así obtener el primer número Random.

16. ¿CÓMO FUNCIONA EL MÉTODO DEL CUADRADO MEDIO?

Se comienza con un número inicial *(Semilla)*, el cual se eleva al cuadrado, después de elevarlo al cuadrado se seleccionan los números del centro *(los dígitos que se deseen)*, los cuales se pondrán después de un punto decimal y este será el número que conformara el primer ***número Random.***

17. ¿CÓMO FUNCIONA EL MÉTODO DE CONGRUENCIA LINEAL?

Produce una secuencia de enteros $X_1, X_2, \ldots$ entre 0 y $m - 1$.

18. ¿CUÁL ES LA FORMULA QUE SE UTILIZA EL MÉTODO DE CONGRUENCIA LINEAL?

$X_{I+1} = (a * X_i + c) / mod\ m, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n+1$

19. ¿A QUE SE REFIERE LA PALABRA MOD?

La palabra ***mod*** indica que se tomara el residuo de la división para obtener el siguiente número aleatorio.

20. ¿EXPLICA QUE REPRESENTAN LAS VARIABLES DE LA FORMULA DEL MÉTODO DE CONGRUENCIA LINEAL?

X_i: Es llamado semilla.
a: Es llamado el multiplicador constante.
c: Es el incremento.
m: Es el módulo.
X_{i+1}: Es el número Random encontrado.

21. ¿CUÁL ES LA FORMULA PARA ENCONTRAR EL NÚMERO ALEATORIO?

R = X / m.